Лекция 5. Понятие эксперимента. Определение закона на множестве всех возможных экспериментов.

Эмпирическая система нам не известна, нам могут быть известны только результаты экспериментов. Поэтому необходимо определить понятие эксперимента на эмпирической системе $\mathfrak{I}$ и понятие закона на множестве всех экспериментов.

Свяжем проверку истинности системы аксиом на эмпирической системе $\mathfrak{I}$ с конкретными конечными экспериментами, на которых эта истинность проверяется. Тем самым мы не просто сделаем проверку аксиом конструктивной, а заменим задачу, которую можно выполнять только на теоретическом уровне, на задачу экспериментальной проверки.

Под интерпретацией языка L на эмпирической системе $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{A}; \Omega_{\mathfrak{I}} \rangle$ будем понимать два отображения:

$I(\mathfrak{I})$ - интерпретацию сигнатурных символов: $I(\mathfrak{I})$: $\Omega \rightarrow \Omega_{\mathfrak{I}}$, сопоставляющую каждому сигнатурному символу P_j, местности nj предикат $P^{\mathfrak{I}}{}_j \in \Omega_{\mathfrak{I}}$

I - интерпретацию переменных I: $X \rightarrow X(A)$, сопоставляющую взаимно однозначно свободным переменным X переменные $X(A) = \{a,b,c,\ldots\}$ по основному множеству **A** эмпирической системы $\mathfrak{I}$.

Под состоянием s: $X(A) \rightarrow \mathbf{A}$ будем понимать отображение переменных из X(A) в некоторый набор объектов $\langle a_1,...a_m \rangle$ из **A**.

Множество всех возможных состояний обозначим через St.

Эксперимент должен состоять в том, чтобы при заданных интерпретациях

$I(\mathfrak{I})$, I предикатных символов и переменных, выбрать из основного множества **A** некоторый набор объектов $\langle a_1,...a_m \rangle$ и подставить их вместо переменных $\{a,b,c,\ldots\}$. Далее определить значения истинности всех атомарных формул на $\langle a_1,...a_m \rangle$.

Определение 1. Для заданных интерпретаций $I(\mathfrak{I})$, I предикатных символов и переменных определим эксперимент как набор

$Exp(s) = \langle\langle a_1,...a_m \rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}} \rangle$, $m \le N$,

где $s \in St$, $s(X(A)) = \langle a_1,...a_m \rangle$; $sI\Omega_{\mathfrak{I}}$ - отображение переменных из предикатных символов из $\Omega_{\mathfrak{I}}$ в набор объектов $\langle a_1,...a_m \rangle$. Суперпозиция $sI\Omega_{\mathfrak{I}}$ задает значения истинности предикатов из $\Omega_{\mathfrak{I}}$ на наборе объектов $\langle a_1,...a_m \rangle$ ♦

Поскольку для данной эмпирической системы $\mathfrak{I}$ интерпретации $I(\mathfrak{I})$, I предикатных символов и переменных фиксированы, то эксперимент обозначается как Exp(s).

Запись $\langle\langle a_1,...a_m \rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}} \rangle$ означает, что значения истинности атомарных высказываний на объектах набора $\langle a_1,...a_m \rangle$ определены и представлены в виде некоторого набора значений истинности всех атомарных высказываний на $\langle a_1,...a_m \rangle$.

Например, для $\Omega_{\mathfrak{I}} = \{\sim\}$ и объектов $\langle a,b,c \rangle$ эксперимент имеет вид:

$\langle\langle a,b,c \rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}} \rangle = \langle (a \sim a) = И, (b \sim b) = И, (c \sim c) = И, (a \sim b) = Л, (a \sim c) = И, (b \sim c) = И, (b \sim a) = Л, (c \sim a) = И, (c \sim b) = Л \rangle$.

Будем предполагать, что порядок атомарных высказываний в наборе $\langle\langle a,b,c \rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}} \rangle$ всегда фиксирован, поэтому, если взять набор значений истинности

$\varepsilon(Exp(s)) = \langle И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л \rangle$

или будем говорить бинарный вектор $\varepsilon(Exp(s))$ соответствующего эксперимента, то этот вектор будет однозначно характеризовать результаты эксперимента. В нашем примере этот вектор можно представить как вершину девятимерного двоичного куба $\{0,1\}^9$. Полученный вектор будем называть значением эксперимента Exp(s).

Пусть у нас есть некоторый эксперимент Exp(s), множество значений которого представляет собой двоичный куб E. Рассмотрим взаимосвязь куба E и булевой алгебры $\Re(\Omega)$. Как известно, любое утверждение из $\Re(\Omega)$ есть дизъюнкция элементарных конъюнкций атомов или их отрицаний из $U(\Omega)$.

Следовательно, во-первых, значение истинности любого утверждения $A \in \Re(\Omega)$ на эксперименте Exp(s) определено и вычисляется по правилам алгебры высказываний, во-вторых, любому утверждению $A \in \Re(\Omega)$ соответствует некоторое подмножество $E(A) \subseteq E$ векторов, на котором (и только на котором) оно истинно.

Так как $И \equiv A\vee\neg A$ и $Л \equiv A\&\neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Omega)$, то всему множеству E и пустому подмножеству $\varnothing$ вершин также соответствуют некоторые высказывания из $\Re(\Omega)$.

Поэтому, фактор алгебра $\Re(\Omega)/\equiv$ высказываний и множество всех подмножеств двоичного куба E изоморфны соответственно относительно логических операций на $\Re(\Omega)/\equiv$ и теоретико-множественных операций на E.

Каждому бинарному вектору $\varepsilon(\mathrm{Exp}(s)) = \langle И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л\rangle \in E$, представляющему собой результаты некоторого эксперимента, будет соответствовать при таком изоморфизме элементарная конъюнкция
$(a \sim a)\&(b \sim b)\&(c \sim c)\&\neg(a \sim b)\&(a \sim c)\&(b \sim c)\&\neg(b \sim a)\&(c \sim a)\&\neg(c \sim b) \in \Re(\Omega)$, описывающая результаты соответствующего эксперимента, которую будем обозначать через A(Exp(s)).

Определим для эмпирической системы $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_\Im\rangle$ множество всех возможных экспериментов $\mathrm{Exp} = \{\mathrm{Exp}(s) \mid s \in \mathrm{St}\}$.

Определение 2. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp(s) тогда и только тогда, когда при определенном в эксперименте Exp(s) наборе значений истинности $\varepsilon(\mathrm{Exp}(s))$ формула C истинна или иначе формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp(s), если $\varepsilon(\mathrm{Exp}(s)) \in E(C)$.

Определение 3. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте $\mathrm{Exp}(s) \in \mathrm{Exp}$.

Определение 4. Законом на Exp будем называть любое истинное на Exp правило C вида (1), каждое подправило которого уже не истинно на Exp.

Теорема 1. Правило C вида (1) является законом эмпирической системы $\Im$ тогда и только тогда, когда оно является законом на Exp.

Лемма 1. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на эмпирической системе $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_\Im\rangle$ тогда и только тогда, когда она истинна на Exp.

Доказательство.

1. Пусть формула C истинна на $\Im$. Докажем, что она истинна на любом эксперименте из Exp. Пусть дан эксперимент Exp(s) с интерпретациями $I(\Im)$, I предикатных символов и переменных. Так как проверка истинности осуществляется для той же интерпретации $I(\Im)$ путем подстановки объектов из $\mathbf{A}$ вместо переменных, то суперпозиция $sI\Omega_\Im$ также является подстановкой объектов из набора $\langle a_1,...a_m\rangle$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_{m'}$, $m' \leq m$ формулы C и поэтому формула C истина на эксперименте Exp(s) вне зависимости от того какие значения принимают другие предикаты на других объектах из набора $\langle a_1,...a_m\rangle$.

2. Пусть формула C истинна на любом эксперименте из Exp. Докажем, что она истинна на эмпирической системе $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_\Im\rangle$. Возьмем произвольные объекты $a_1,...a_{m'} \in \mathbf{A}$ и подставим их в формулу C вместо переменных $x_1, \ldots, x_{m'}$. Докажем, что формула C будет истинной. Поставим эксперимент над набором объектов $\langle a_1,...a_{m'}\rangle$, в котором суперпозиция sI отображает переменные $x_1, \ldots, x_{m'}$ сначала в переменные их $X(A) = \{a,b,c,\ldots\}$, а потом состоянием s в набор объектов $\langle a_1,...a_m\rangle$ из $\mathbf{A}$ так что бы в результате вместо переменны $x_1, \ldots, x_{m'}$ подставились объекты набора именно в том порядке, как мы подставили для проверки истинности. Формула C будет истинна на полученном эксперименте Exp(s) и, значит, будет истинна на подставленных объектах.

Поэтому мы не будем вводить отдельного определения для множества всех законов на Exp, а будем его обозначать также через L.

Таким образом, задача обнаружения теории эмпирической системы $Th(\Im)$ переходит в задачу: определения множества L всех законов на Exp.

События и вероятности событий

Сделаем следующий шаг обобщения: будем предполагать, что объекты для экспериментов выбираются некоторым случайным образом из основного множества **A** эмпирической системы как из генеральной совокупности объектов.

Это позволит нам ввести вероятность на множестве экспериментов, не меняя определения эксперимента как некоторого "фрагмента" эмпирической системы.

Определим вероятность μ на двоичном кубе E размерности N.

Определение 5. Вероятностью на E будем называть отображение μ: $E \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

1. $\sum_{\varepsilon\in E}\mu(\varepsilon) = 1$
2. $\mu(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$.

Смысл условия 2 объясняется нижеследующей леммой 2.

Он состоит в том, что вероятность должна быть согласована с истинностью высказываний: если высказывание A тождественно истинно на $\Im$, то его вероятность должна быть равна 1, если же оно тождественно ложно, то его вероятность должна быть равна 0.

Определение 6. Событием в эксперименте Exp(s) будем называть любое подмножество E(A) $\subseteq$ E, $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$, $A \in \Re(\Omega)$. Вероятностью μ события E(A) будем называть величину

$$\mu(E(A)) = \sum_{\varepsilon\in E(A)}\mu(\varepsilon)$$

Будем говорить, что в результате эксперимента Exp(s) произошло событие E(A) или событие A, если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$. Событие A является элементом булевой алгебры $\Re(\Omega)$, которую мы так же будем называть **булевой алгеброй событий**.

Вероятность μ индуцирует вероятность η на булевой алгебре высказываний $\Re(\Omega)$.

Лемма 2. Функция $\eta(A) = \mu(E(A))$, $A \in \Re(\Omega)$, определяет на $\Re(\Omega)$ вероятность и для любых $A,B \in \Re(\Omega)$ удовлетворяет следующим аксиомам вероятности:

1. $\eta(A\vee B) + \eta(A\&B) = \eta(A) + \eta(B)$;
2. $\eta(\neg A) = 1 - \eta(A)$;
3. Если $\vdash A \equiv B$, то $\eta(A) = \eta(B)$;
4. Если $\vdash A$, то $\eta(A) = 1$,

где $\vdash$ доказуемость в исчислении высказываний.

Из условия 2 Определение 5 вероятности следует, что не только при доказуемости высказывания, но и при его истинности на эмпирической системе $\Im$, оно должно иметь вероятность 1.

Лемма 3. Для любого высказывания $A \in \Re(\Omega)$ выполнены следующие условия:

1. $\Im \vDash A \Leftrightarrow \eta(A) = 1$;
2. $\Im \vDash \neg A \Leftrightarrow \eta(A) = 0$.

Доказательство. Докажем, что условия 1 и 2 леммы эквивалентны. Подставим в условие 1 вместо высказывания A высказывание $\neg A$, получим: $\Im \vDash \neg A \Leftrightarrow \eta(\neg A) = 1 \Leftrightarrow (1 - \eta(A)) = 1 \Leftrightarrow \eta(A) = 0$. Докажем теперь условие 2. Пусть $\Im \vDash \neg A$, тогда A всюду ложно на $\Im$ и, значит, в силу Лемма 1 A ложно на Exp. Отсюда, в силу Определение 3, A ложно на каждом эксперименте из Exp, поэтому $\{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$ и $\mu(\varepsilon) = 0$, откуда следует, что $\eta(A) = 0$. Обратное доказательство получается обратным ходом рассуждения.