Лекция 3.

Взаимосвязь принципа феноменологической симметрии и условия замыкания Томсена

Для физической структуры ранга (2,2) принцип феноменологической симметрии имеет вид:

$\forall i,j,\alpha,\beta\ \varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = 0$ (1)

где $i,j \in M$, $\alpha,\beta \in N$.

Решение уравнения для физической структуры ранга (2,2) можно представить в виде:

$a_{i\alpha} = \chi'(R'(a_{i\,\alpha 0}) + S'(a_{i0\,\alpha}))$, (2)

$\varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = (\chi')^{-1}(a_{i\alpha}) + (\chi')^{-1}(a_{j\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{i\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{j\alpha}) = 0$

Теорема. Если модель $\langle M\times N; \le \rangle$ является аддитивной соединительной структурой, то существуют функции φ: $M \to Re$, ψ: $N \to Re$, удовлетворяющие для любых $i,j \in M$; $\alpha,\beta \in N$ соотношению

$(i,\alpha) \le (j,\beta) \Leftrightarrow \varphi(i) + \psi(\alpha) \le \varphi(j) + \psi(\beta)$. (3)

Если φ', ψ' – другие функции, удовлетворяющие (3), то существуют $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$ такие, что

$\varphi' = \varepsilon\varphi + x_1$, $\psi' = \varepsilon\psi + x_2$. (4)

Пусть в модели $\langle M\times N; \le \rangle$ отношение порядка задается соотношением

$(i,\alpha) \le (j,\beta) \Leftrightarrow a_{i\alpha} \le a_{j\beta}$ (5)

Теорема. Пусть для модели $\langle M\times N; \le \rangle$ выполнено соотношение (5) и на множествах M,N задана физическая структура ранга (2,2). Тогда эта модель является аддитивной соединительной структурой и для функций R', S' из **(2)** существуют в силу предыдущей теоремы функции φ, ψ и $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$ такие, что $R'(a_{i\alpha 0}) = \varepsilon\varphi(i) + x_1$, $S'(a_{i0\alpha}) = \varepsilon\psi(\alpha) + x_2$.

Взаимосвязь принципа феноменологической симметрии и условия замыкания Томсена.

Функция φ для физической структуры ранга (2,2) разрешима относительно первого аргумента, поэтому существует функция f

$\forall i,j,\alpha,\beta(a_{i\alpha} = f(a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}))$. (6)

Кроме того, как видно из решения (2), функция f удовлетворяет условию

$\forall i,j,\alpha,\beta(f(a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = f(a_{j\alpha},a_{i\beta},a_{j\beta}))$. (7)

Теорема. Если выполнены соотношения (6),(7) для некоторой функции f и соотношение (5),

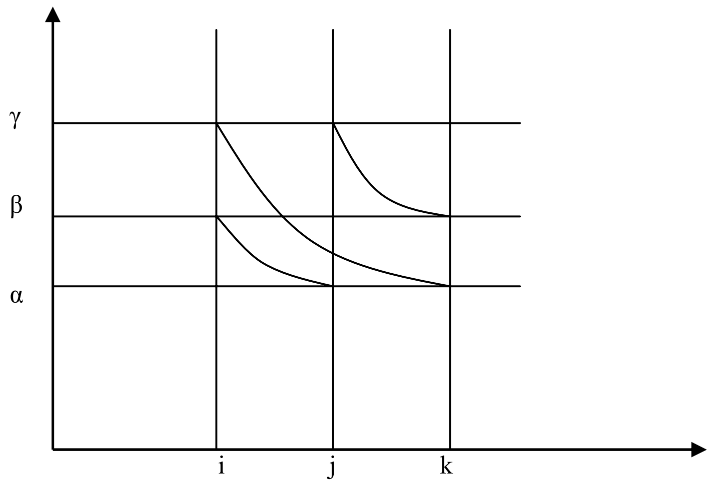

Рис. 1

связывающее функцию f с моделью $\langle M\times N; \leq \rangle$, то на этой модели выполнено условие Томсена (аксиома 3 $(j,\alpha) \sim (i,\beta) \& (k,\beta) \sim (j,\gamma) \Rightarrow (k,\alpha) \sim (i,\gamma)$).

Доказательство: Пусть $(j,\alpha) \sim (i,\beta)$ & $(k,\beta) \sim (j,\gamma)$ (Рис. 1). Тогда в силу (5) $a_{j\alpha} = a_{i\beta}$ и $a_{k\beta} = a_{j\gamma}$. Подставив в (6) γ вместо α, получим $a_{i\gamma} = f(a_{i\beta},a_{j\gamma},a_{j\beta})$. Из равенств $a_{i\beta} = a_{j\alpha}$ и $a_{j\gamma} = a_{k\beta}$ следует, что $f(a_{i\beta},a_{j\gamma},a_{j\beta}) = f(a_{j\alpha},a_{k\beta},a_{j\beta})$. Из (7) следует $f(a_{j\alpha},a_{k\beta},a_{j\beta}) = f(a_{k\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = a_{k\alpha}$. Откуда $a_{i\gamma} = a_{k\alpha}$ и $(i,\gamma) \sim (k,\alpha)$ ■

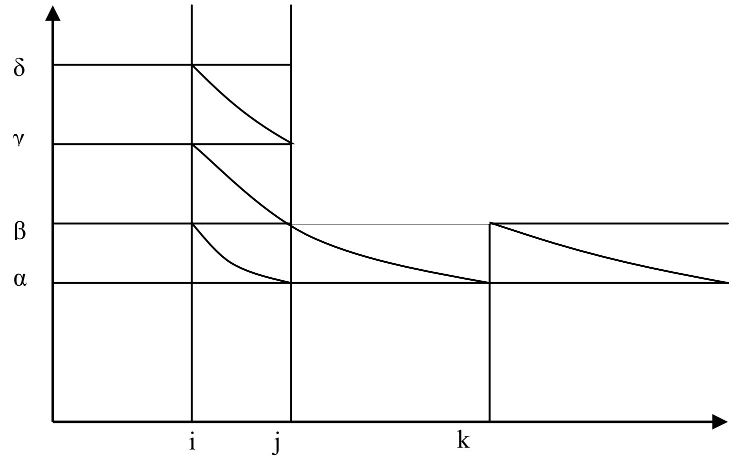

Рис. 2

Таким образом, принцип феноменологической симметрии, усиленный свойствами (6), (7) дает нам условие замыкания Томсена.

Этот принцип, а также условие Томсена являются основными характеристиками законов вида $y = x\cdot z$. Если мы возьмем произвольные два элемента $i,j \in M$ и элемент $\alpha \in N$ и подберем элемент $\beta \in N$ такой, что $a_{i\beta} \sim a_{j\alpha}$, то различие между элементами i и j при заданном α, определяемое значениями $a_{i\alpha}$, $a_{j\alpha}$, будет равно различию между α и β при заданном i, определяемому значениями $a_{i\alpha}$ $a_{i\beta}$. Так, благодаря измерительной процедуре a: $M\times N \to \|a_{i\alpha}\|$, мы можем соизмерять объекты двух разных множеств M и N. Поэтому сам факт существования эксперимента, позволяющего произвольным двум объектам $i \in M$ и $\alpha \in N$ сопоставлять некоторое число $a(i,\alpha) = a_{i\alpha}$, позволяет соизмерять объекты этих двух множеств. Процедуру соизмерения можно продолжать, что, в принципе, позволяет ввести некоторую величину на множестве M и некоторую величину на множестве N. Значение $a_{i\alpha}$ может тогда быть некоторой функцией этих двух величин и выражать некоторый закон.

Вид закона и свойства величин зависят от взаимосвязи одних процедур соизмерения с другими при различном выборе $i \in M$ и $\alpha \in N$. Эта взаимосвязь и определяется принципом феноменологической симметрии.

Конструктивные числовые представления величин

Исследования, проводимые в психологии, социологии, принятии решений, экспертном оценивании и других областях, показывают, что есть много сложных, структурных «нечисловых» величин (частичные порядки, толерантности, решетки и т.д.). Логический анализ таких величин показал, что эмпирические системы таких величин нельзя сильным гомоморфизмом отобразить в поле вещественных чисел, т.е. для таких величин нельзя построить их числовые представления в теории измерений.

Смыслу числового представления точнее всего соответствует понятие конструктивизации эмпирической системы. В этом случае значениям величины приписываются натуральные, рациональные или другие числа (или коды) так, чтобы значения отношений и операций в эмпирической системе можно было эффективно определить по этим числам. Такой способ получения числовых представлений не накладывает на числовые отношения и операции никаких ограничений, кроме эффективности, предъявляет более слабые требования к системе аксиом и не связан с требованием существования гомоморфизма в какие-то другие системы. Для построения конструктивных числовых представлений мы будем использовать Теорию Конструктивных Моделей (ТКМ).

Напомним, что мы рассмотрели основные определения и проблемы теории измерений. В данном параграфе мы сформулируем основные определения и проблемы конструктивных числовых представлений так, чтобы была видна полная аналогия этих определений с определениями и проблемами теории измерений.

Пусть знания о некоторой величине, свойстве, признаке сформулированы в некоторой теории T сигнатуры

$\Omega = \langle P_1,\ldots,P_n, \rho_1,\ldots,\rho_m, c_0,c_1,c_2,\ldots\rangle$,

P_i , $i \le n$, – предикатные символы;

ρ_j , $j \le m$, – символы операций;

c_l , $l \in I$, – символы констант, $I \subset \omega = \{0,1,2,\ldots\}$.

Пусть величина представлена эмпирической системой $\Im = \langle \mathbf{A};\ \Omega_\Im\rangle \in AC_\omega(\Sigma)$ сигнатуры Ω, удовлетворяющей системе аксиом Σ.

При конструктивном представлении величин значения $a \in A$ величины $\Im = \langle A;\ \Omega_\Im\rangle$ нумеруются (кодируются).

Нумерацией множества A называется отображение ν множества (подмножества) N натуральных (рациональных) чисел $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ на A, ν: $N \to A$.

Определение 1. Пару $(\Im,\nu)$ будем называть конструктивным числовым представлением величины $\Im$ (конструктивной системой, ТКМ), а нумерацию

ν – конструктивным числовым представлением (конструктивизацией, ТКМ),

если существует характеристические общерекурсивные функции $P^N_1,\ldots,P^N_n$ со значениями во множестве $\{0,1\}$,

общерекурсивные функции $\rho^N_1,\ldots,\rho^N_m$ и

натуральные числа c^N_0, c^N_1, $c^N_2,\ldots$ такие, что

1. $P^\Im_i(\nu n_1,\ldots, \nu n_{mi}) \Leftrightarrow (P^N_i(n_1,\ldots,n_{mi}) = 1)$, $i = 0,1,\ldots,n$;

2. $\rho^\Im_j(\nu n_1,\ldots, \nu n_{mj}) = \nu\rho^N_j(n_1,\ldots,n_{mj})$, $j = 1,\ldots,m$;

3. $c^\Im_l = \nu c^N_l$, $l \in I$ ♦

Конструктивное числовое представление ν аналогично шкале, только вместо числовых отношений, операций и констант используются общерекурсивные функции и натуральные числа. Конструктивной числовой системой является система

$N = \langle\omega;\Omega_N\rangle$, $\Omega_N = \{P^N_0,P^N_1,\ldots,P^N_n, \rho^N_1,\ldots,\rho^N_m, c^N_0, c^N_1, c^N_2,\ldots\}$

Сформулируем проблемы существования и единственности для конструктивного числового представления.

Проблема существования. Доказать, что для любой системы $\Im \in AC_\omega(\Sigma)$ существует конструктивное числовое представление и существует алгоритм ограниченной (минимальной) сложности реализующий построение всех этих конструктивизаций.

Проблема единственности. Найти различные способы конструктивного числового представления величин.

Проблема адекватности. Доказать, что метод инвариантен относительно выбора конструктивного числового представления величин.

Примеры конструктивных представлений величин

Рассмотрим отношение строгого линейного порядка P.

Оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\neg\, a < a$;
2. $a < b \;\&\; b < c \Rightarrow a < c$;
3. $a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$.

Теорема: Пусть величина $\Im = \langle \mathbf{A}; < \rangle \in AC_{fin}(\Sigma)$ – является строгим линейным порядком на конечном множестве **A**, тогда существует нумерация основного множества ν: $N \to \mathbf{A}$, такая что:

$a_i < b_j \Leftrightarrow i < j$.

Лемма: на любом подмножестве $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{C} \neq \varnothing$ существует единственный минимальный элемент. Алгоритм нахождения минимального элемента состоит из следующих шагов:

1. берем произвольный элемент $x \in \mathbf{C}$ и определим $\overline{B} = \mathbf{C}\backslash x$, $B = \varnothing$;
2. выберем произвольный элемент $y \in \overline{B}$, $x \neq y$. Если $\overline{B} = \varnothing$, то останов;
3. в силу аксиомы 3 мы имеем $x < y \vee y < x$.

   Если $y < x$, то определяем $\overline{B} = \overline{B}\backslash x$ и $B = B \cup x$ и заменяем x на y

   Если $x < y$, то определяем $\overline{B} = \overline{B}\backslash y$ и $B = B \cup y$

   Переходим к шагу 2.

По индукции можно доказать, что x – минимальный элемент $x < y$, $y \in B$, $B = \mathbf{C}\backslash x$:

1. если **C** одноэлементное множество, то на шаге 1 мы его и выбрали;
2. если **C** содержит более чем один элемент, то на первом проходе шагов 1-3 получим, что B содержит x, если $y < x$ и y, если $x < y$. В обоих случаях условие $x < y$, $y \in B$ выполняется;
3. если на шаге n условие $x < y$, $y \in B$ выполняется, то на шаге n+1 во множество B будет записан x, если $y < x$ и тогда в силу аксиомы 2 транзитивности получим, что $y < x$ и $x < z$, $z \in B$ и, значит $y < z$, $z \in B$ и условие выполнено;

   либо во множество B будет записан y, если $x < y$ и тогда условие $x < y$, $y \in B$ также выполнено.

Доказательство теоремы: Возьмем множество **A** и найдем по лемме минимальный элемент a. обозначим его индексом 1. Получим a_1. Возьмем множество $\mathbf{A}\backslash a_1$ и найдем для него минимальный элемент a и обозначим его индексом 2. Получим объект a_2. Продолжая далее получим упорядочение всех элементов

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n.$$

В силу транзитивности будет выполнено условие теоремы.

Полученный алгоритм применим к любой величине $\Im = \langle \mathbf{A}; < \rangle \in AC_{fin}(\Sigma)$.

Такие алгоритмы называются алгоритмами сортировки.

Его сложность $n^2/2$. Но это не минимальная сложность.

Конструктивное числовое представление процедур шкалирования для экстенсивных величин

В теории измерений [143] такие величины как массы, длина, скорость задаются системой аксиом экстенсивных величин:

1. < - слабый линейный порядок;
2. $\forall x,y,z(x\bullet(y\bullet z) \sim (x\bullet y)\bullet z)$,
3. $\forall x,y,z(x \leq y \Leftrightarrow z\bullet x \leq z\bullet y \Leftrightarrow x\bullet z \leq y\bullet z)$,
4. Для любых x,y,z,u; если $x < y$, то существует натуральное число n, $nx\bullet z < ny\bullet u$, $nx = x\bullet...\bullet x$.

Числовые представления экстенсивных величин определяются следующей теоремой.

Теорема [143]. Система $\langle A; <, \bullet\rangle$, $A \neq \varnothing$, является замкнутой экстенсивной структурой тогда и только тогда, когда существует отображение φ: $A \to Re$, удовлетворяющее для любых $a,b \in A$ условиям:

1. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$,
2. $\varphi(a\bullet b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Из теоремы следует, что числовым представлением замкнутой экстенсивной структуры является её сильный гомоморфный образ в $R = \langle Re, <, +\rangle$. Каждому значению $a \in A$ экстенсивной величины $M = \langle A; <,\bullet\rangle$ можно сопоставить действительное число. Считается, что этой теоремой дается математическая модель измерительных приборов экстенсивных величин (весов, линейки и т.д.).

Эта теорема, тем не менее, не дает способ построения отображения φ (шкалирования прибора). Шкала прибора, а в дальнейшем и результаты измерения, определяются процедурой шкалирования прибора, которая дает нам значения φ в отдельных точках. Процедура шкалирования опирается на некоторую алгебраическую спецификацию, но ввиду ее конструктивного характера ей нужны, вообще говоря, другие свойства величины, чем те, которые требуются для гомоморфного вложения в Re.

Поэтому более адекватным и конструктивным представлением экстенсивных величин является алгебраическая спецификация процедуры шкалирования величины. Проиллюстрируем этот подход на примере экстенсивных величин.

Алгебраическая спецификация процедуры шкалирования может быть задана аксиомами 1,2,3 и следующей схемой аксиом:

4'. $\forall y \exists x(kx \sim y)$, $k = 1,2,...$,

$\exists x,y \neg(x \sim y)$.

Алгебраическим представлением процедуры шкалирования экстенсивных величин является система $N = \langle B; <,\bullet\rangle$, удовлетворяющая аксиом 1-3,4'. Эта система может быть порождена произвольным своим элементом b, таким что $\neg(b\bullet b \sim b)$.

Конструктивным числовым представлением этой системы является конструктивизация факторсистемы $N/\sim$.

Утверждение 1. Факторсистема $N/\sim$, удовлетворяющая системе аксиом 1-3,4', изоморфна $\Re a = \langle Ra^+ ; \leq, + \rangle$, $R^+a = \{m/n \mid m,n = 1,2,...\}$.