Лекция 2. Представление законов в Теории Измерений.

Что понимается под обнаружением законов в направлении Scientific Discovery?

Понимается просто аппроксимация экспериментальных точек некоторой кривой. Но это не имеет к обнаружению законов никакого отношения.

Обнаружение законов описано в Теории Измерений, но они не претендуют на то, что дали определение закона.

Что такое закон природы ???

На этот вопрос пока что дают ответы две теории:

Теория Измерений и Теория Физических структур.

Известно, что законы классической физики просты. Дадим объяснение этому факту.

Законы просты потому что в них шкалы величин связаны с самим законом и получаются процедурой одновременного шкалирования всех входящих в закон величин.

Приведём сначала систему аксиом теории измерений.

Предположим, что в некотором эксперименте взаимодействие двух величин дает третью величину $y = f(x,z)$. Предположим также, что результаты эксперимента представляются наборами чисел $\langle y,x,z\rangle$. Для величины y интерпретируемо отношение порядка $\geq$ на Re, а для величин x, z – отношение равенства.

Определим класс функций F на $X\times Z$, $X,Z \subset$ Re, $X, Z \neq \varnothing$, таких, что функция $f \in F$ определена на $X\times Z$ и удовлетворяет свойствам 1-5 аддитивной соединительной структуры.

1*. $\forall z_1,z_2, \exists x\ (f(x, z_1) \geq f(x, z_2) \Rightarrow \forall x' f(x', z_1) \geq f(x', z_2)))$;

2. $\forall x_1,x_2,x_3,z_1,z_2,z_3((f(x_1,z_2) \approx f(x_2,z_1))\&(f(x_1,z_3) \approx f(x_3,z_1)) \Rightarrow (f(x_2, z_3) \approx f(x_3,z_2))$;

3. Для любых трех из четырех значений x_1,x_2,z_1,z_2 существует четвертое такое, что $f(x_1,z_2) = f(x_2,z_1)$;

4*. $\exists\ x_1,x_2,z\ (f(x_1, z) \neq f(x_2, z))$;

5*. Для любых z_1,z_2, $z_1 \neq z_2$, если на X определена ограниченная последовательность $x_1,x_2,\ldots$; $x_i \leq x_{max}$

$f(x_1, z_1) = f(x_2, z_2)$,
$f(x_2, z_1) = f(x_3, z_2)$,
$f(x_3, z_1) = f(x_4, z_2)$,
…………………..,

то она конечна. Кванторы всеобщности и существования относятся к множествам X, Z. Свойства, отмеченные звездочкой, сформулированы только для переменной x. Аналогичные свойства, получающиеся из приведенных заменой символа x на символ z и наоборот, должны выполняться для переменной z.

Теорема. Для любой функции $f \in F$ существуют взаимно однозначные функции φ_x, φ_z и монотонная функция φ такие, что

$$\varphi f(x, z) = \varphi_x(x) + \varphi_z(z),\ \langle x,z\rangle \in X\times Z \ \blacksquare$$

Из теоремы следует, что, если для некоторой функции $y = f(x,z)$ свойства 1-5 выполнены, то функциональная зависимость может быть приведена к виду $y = x + z$ перешкалированием величин.

Процедура перешкалирования извлекается из доказательства теоремы и системы аксиом.

Пусть у нас есть функция $f \in F$ на $X\times Z$, удовлетворяющая аксиомам 1-5.

В силу аксиомы 4 существуют точки на плоскости $\langle x_0,z_0\rangle$, $\langle x_1,z_0\rangle$ такие, что $f(x_0, z) \neq f(x_1, z)$. Будем шкалировать одновременно шкалы X, Z и Y. Припишем значению x_0 по шкале X величину 0 и запишем это через $X(x_1) = 0$; значению x_1 величину $X(x_1) = 1$; значению z_0 по оси Z величину $Z(z_0) = 0$; значениям функции f по оси Y величины $f(x_0,z_0) = 0$, $f(x_1,z_0) = 1$ (см. Рис. 1).

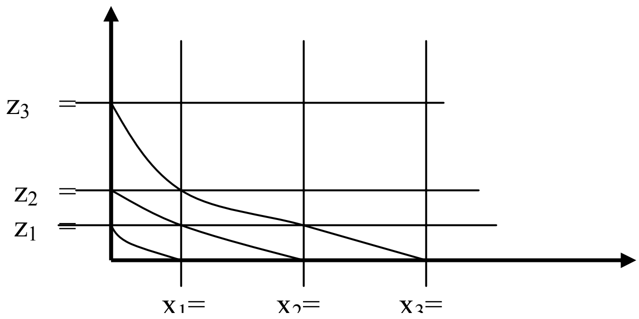

Рис. 1

По аксиоме 3 для трех элементов x_0,z_0,x_1 существует четвертый z_1, такой что $f(x_0,z_1) = f(x_1,z_0)$. Соединим точки $\langle x_0,z_1\rangle$, $\langle x_1,z_0\rangle$ кривой как показано на рис. 1. Вдоль этой линии функция принимает одинаковые значения и эти значения будут значениями шкалы для величины y, которая не изображена.

Нетрудно проверить, что выполнено соотношение $x + z = y$.

Возьмем точку $\langle x_1,z_1\rangle$. Положим для нее значение величины $y = f(x_1,z_1) = 2$.

Найдем теперь значения x_2,z_2 соответствующие значению 2.

Для этого снова применим аксиому 3 и найдем значение x_2, такое что $f(x_1,z_1) = f(x_2,z_0)$,

и значение z_2, такое что $f(x_0,z_2) = f(x_1,z_1)$.

Получим $y = f(x_0,z_2) = f(x_1,z_1) = f(x_2,z_0) = 2$. Возьмем теперь точки $\langle x_2,z_1\rangle$ и $\langle x_1,z_2\rangle$. Что бы данное построение было возможным и дальше нужно что бы для этих точек значения функции были одинаковыми. Это следует из аксиомы 2.

Продолжая построение получим закон $y = x + z$ вместо исходной функциональной зависимости $y = f(x,z)$. Здесь опущено построение промежуточных значений для функции $y = x + z$, но они легко заполняются в силу аксиомы 1.

Теория Физических Структур

На вопрос что такое закон природы отвечает Теория Физических Структур (ТФС).

В теории физических структур на основании принципа феноменологической симметрии выведен функциональный вид возможных фундаментальных физических законов.

Показано, что фундаментальные физические законы (кроме законов статистической физики и физики элементарных частиц), а также входящие в них величины могут быть выведены из этого принципа. Этот принцип записывается в виде функционального уравнения специального вида. Рассмотрим два произвольных множества:

множество M с элементами i, k, … и

множество N с элементами $\alpha,\beta,\ldots$

Допустим, что каждой паре $i \in M$, $\alpha \in N$ сопоставляется действительное число $a_{i\alpha} \in \Re$, так что в конечном итоге множеству $M\times N$ сопоставляется некоторая числовая матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$. Так, если M и N – множества физических объектов различной природы, то матрица $\|a_{i\alpha}\|$ представляет собой результат эксперимента, характеризующий отношения, в которых находятся объекты i и α.

Мы будем говорить, что на множествах M и N задана физическая структура ранга (r,s), если $r \cdot s$ чисел, стоящих на пересечении любых r строк i,k,…,l и любых s столбцов $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$, связаны между собой функциональной зависимостью

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha}, a_{k\beta}, \ldots, a_{k\gamma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$a_{l\alpha}, a_{l\beta}, \ldots, a_{l\gamma}$),

вид которой не зависит от выбора подмножества из r элементов

$M_r = \{ i, k, \ldots , l \} \subset M$

и множества из s элементов

$N_s = \{ \alpha, \beta, \ldots, \gamma \} \subset N$.

При этом предполагается, что функция Ф аналитична и не может быть представлена в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных.

Мы будем говорить также, что функциональная зависимость вида (1) задает физический закон ранга (r,s), инвариантный относительно выбора конечных подмножеств M_r, N_s и реализуемый на множествах M и N.

Г.Г.Михайличенко было решено уравнение и получены аналитические выражения для всех законов, удовлетворяющих принципу феноменологической симметрии [47]. Им была доказана теорема, что функции Ф и $a_{i\alpha}$ могут иметь только один из следующих видов:

1. для r = s = 2

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}(x_i+\xi_\alpha),$$

$$\Psi(a_{i\alpha}) - \Psi(a_{i\beta}) - \Psi(a_{j\alpha}) + \Psi(a_{j\beta}) = 0;$$

2. для r = 4, s = 2

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}[(x_i\xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2) / (x_i + \xi_\alpha^3)],$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & 1 \\ \Psi[a_{j\alpha}] & \Psi[a_{j\beta}] & \Psi[a_{j\alpha}] & \Psi[a_{j\beta}] & 1 \\ \Psi[a_{k\alpha}] & \Psi[a_{k\beta}] & \Psi[a_{k\alpha}] & \Psi[a_{k\beta}] & 1 \\ \Psi[a_{l\alpha}] & \Psi[a_{l\beta}] & \Psi[a_{l\alpha}] & \Psi[a_{l\beta}] & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

3. для r = s ≥ 3

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1}\xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi[a_{v\alpha}] & \Psi[a_{v\beta}] & \ldots & \Psi[a_{v\tau}] \end{vmatrix} = 0;$$

а также

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ 1 & \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Psi[a_{v\alpha}] & \Psi[a_{v\beta}] & \ldots & \Psi[a_{v\tau}] \end{vmatrix} = 0;$$

4. для r = s + 1 ≥ 3

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ 1 & \Psi[a_{i\alpha}] & \Psi[a_{i\beta}] & \ldots & \Psi[a_{i\tau}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Psi[a_{v\alpha}] & \Psi[a_{v\beta}] & \ldots & \Psi[a_{v\tau}] \end{vmatrix} = 0;$$

5. для r – s ≥ 2, кроме случая r = 4, s = 2, физических структур не существует.

Ψ - строго монотонная аналитическая функция одной переменной в определенной окрестности; Ψ^{-1} – обратная функция; x_i , ξ_α - независимые параметры.

Соотношение между физической структурой ранга (2,2) и аддитивной соединительной структурой

Для физической структуры ранга (2,2) принцип феноменологической симметрии имеет вид:

$\forall i,j,\alpha,\beta\ \varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = 0$ (2)

где $i,j \in M$, $\alpha,\beta \in N$.

Решение уравнения для физической структуры ранга (2,2) можно представить в виде:

$a_{i\alpha} = \chi'(R'(a_{i\,\alpha 0}) + S'(a_{i0\,\alpha}))$, (3)

$\varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = (\chi')^{-1}(a_{i\alpha}) + (\chi')^{-1}(a_{j\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{i\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{j\alpha}) = 0$

Если обозначить $y_{i\alpha} = \chi'^{-1}(a_{i\alpha})$, $x_i = R'(a_{i\alpha 0})$, $z_\alpha = S'(a_{i0\alpha})$, то получим обычное выражение закона $y_{i\alpha} = x_i + z_\alpha$.

Покажем, что физическая структура ранга (2,2) может быть описана системой аксиом аддитивных соединительных структур Теории Измерений.

Определение. Модель $\langle M\times N; \leq \rangle$ называется аддитивной соединительной структурой, если $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$, $a \sim b \Leftrightarrow (a \leq b)\ \&\ (b \leq a)$ и для любых $i,j,k,\ldots \in M$, $\alpha,\beta,\gamma,\ldots \in N$ выполнены следующие аксиомы:

1. - слабый линейный порядок;
2. * $\exists i(i,\alpha) \leq (i,\beta) \Rightarrow \forall j(j,\alpha) \leq (j,\beta)$;
3. $(j,\alpha) \sim (i,\beta)\&(k,\beta) \sim (j,\gamma) \Rightarrow (k,\alpha) \sim (i,\gamma)$;
4. * $(i,\alpha) \leq (j,\beta) \leq (i,\gamma) \Rightarrow \exists\varepsilon(i,\varepsilon) \sim (j,\beta)$;
5. * $\exists i,j,\alpha((i,\alpha) \nsim (j,\alpha))$;
6. Если $\exists i(i,\alpha) \nsim (i,\beta)$ и определена ограниченная последовательность $(i_k,\alpha) \leq (j,\gamma)$, $k = 1,2,\ldots$ такая, что $(i_1,\alpha) \sim (i_2,\beta)$, $(i_2,\alpha) \sim (i_3,\beta)$, $(i_3,\alpha) \sim (i_4,\beta)$, … $i_1,i_2,\ldots \in M$ то она конечна ■

Аксиомы, отмеченные звездочкой, сформулированы относительно элементов множества M, аналогичные аксиомы должны выполняться относительно элементов множества N.

Третья аксиома, называемая условием замыкания Томсена, соответствует принципу феноменологической симметрии и будет обсуждена ниже.

Числовые представления аддитивных соединительных структур определяет следующая теорема.

Теорема. Если модель $\langle M\times N; \leq \rangle$ является аддитивной соединительной структурой, то существуют функции $\varphi: M \to Re$, $\psi: N \to Re$, удовлетворяющие для любых $i,j \in M$; $\alpha,\beta \in N$ соотношению

$(i,\alpha) \leq (j,\beta) \Leftrightarrow \varphi(i) + \psi(\alpha) \leq \varphi(j) + \psi(\beta)$. (4)

Если φ', ψ' – другие функции, удовлетворяющие (4), то существуют $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$ такие, что

$\varphi' = \varepsilon\varphi + x_1$, $\psi' = \varepsilon\psi + x_2$. (5)

Пусть в модели $\langle M\times N; \leq \rangle$ отношение порядка задается соотношением

$(i,\alpha) \leq (j,\beta) \Leftrightarrow a_{i\alpha} \leq a_{j\beta}$ (6)

Теорема. Пусть для модели $\langle M\times N; \leq \rangle$ выполнено соотношение **(6)** и на множествах M,N задана физическая структура ранга (2,2). Тогда эта модель является аддитивной соединительной структурой и для функций R', S' из **(3)** существуют в силу предыдущей теоремы функции φ, ψ и $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$ такие, что $R'(a_{i\alpha 0}) = \varepsilon\varphi(i) + x_1$, $S'(a_{i0\alpha}) = \varepsilon\psi(\alpha) + x_2$.