Лекция 4. Соотношение между физической структурой ранга (2,2) и аддитивной соединительной структурой

Для физической структуры ранга (2,2) принцип феноменологической симметрии имеет вид:

$$\forall i,j,\alpha,\beta\ \varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = 0 \qquad (1)$$

где $i,j \in M$, $\alpha,\beta \in N$.

Решение уравнения для физической структуры ранга (2,2) можно представить в виде:

$$a_{i\alpha} = \chi'(R'(a_{i\,\alpha 0}) + S'(a_{i0\,\alpha})), \qquad (2)$$

$$\varphi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = (\chi')^{-1}(a_{i\alpha}) + (\chi')^{-1}(a_{j\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{i\beta}) - (\chi')^{-1}(a_{j\alpha}) = 0$$

Если обозначить $y_{i\alpha} = \chi'^{-1}(a_{i\alpha})$, $x_i = R'(a_{i\alpha 0})$, $z_\alpha = S'(a_{i0\alpha})$, то получим обычное выражение закона $y_{i\alpha} = x_i + z_\alpha$.

Докажем, что физическая структура ранга (2,2) может быть описана системой аксиом аддитивных соединительных структур Теории Измерений.

Определение. Модель $\langle M\times N; \le \rangle$ называется аддитивной соединительной структурой, если $M \ne \varnothing$, $N \ne \varnothing$, $a \sim b \Leftrightarrow (a \le b)\&(b \le a)$ и для любых $i,j,k,\ldots \in M$, $\alpha,\beta,\gamma,\ldots \in N$ выполнены следующие аксиомы:

1. $\le$ - слабый линейный порядок;
2. * $\exists i(i,\alpha) \le (i,\beta) \Rightarrow \forall j(j,\alpha) \le (j,\beta)$;
3. $(j,\alpha) \sim (i,\beta)\&(k,\beta) \sim (j,\gamma) \Rightarrow (k,\alpha) \sim (i,\gamma)$ условием замыкания Томсена;
4. * $(i,\alpha) \le (j,\beta) \le (i,\gamma) \Rightarrow \exists\varepsilon(i,\varepsilon) \sim (j,\beta)$;
5. * $\exists\, i,j,\alpha((i,\alpha) \nsim (j,\alpha))$;
6. Если $(i,\alpha) \nsim (i,\beta)$ и определена ограниченная последовательность $(i_k,\alpha) \le (j,\gamma)$, $k = 1,2,\ldots$ такая, что $(i_1,\alpha) \sim (i_2,\beta)$, $(i_2,\alpha) \sim (i_3,\beta)$, $(i_3,\alpha) \sim (i_4,\beta)$, … $i_1,i_2,\ldots \in M$ то она конечна ■

Аксиомы, отмеченные звездочкой, сформулированы относительно элементов множества M, аналогичные аксиомы должны выполняться относительно элементов множества N.

Числовые представления аддитивных соединительных структур определяет следующая теорема.

Теорема. Если модель $\langle M\times N; \le \rangle$ является аддитивной соединительной структурой, то существуют функции $\varphi: M \to Re$, $\psi: N \to Re$, удовлетворяющие для любых $i,j \in M$; $\alpha,\beta \in N$ соотношению

$$(i,\alpha) \le (j,\beta) \Leftrightarrow \varphi(i) + \psi(\alpha) \le \varphi(j) + \psi(\beta) \qquad (3)$$

Если φ', ψ' – другие функции, удовлетворяющие (3), то существуют $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$, что

$$\varphi' = \varepsilon\varphi + x_1,\ \psi' = \varepsilon\psi + x_2. \qquad (4)$$

Пусть в модели $\langle M\times N; \le \rangle$ отношение порядка задается соотношением

$$(i,\alpha) \le (j,\beta) \Leftrightarrow a_{i\alpha} \le a_{j\beta} \qquad (5)$$

Теорема. Пусть для модели $\langle M\times N; \le \rangle$ выполнено соотношение (5) и на множествах M,N задана физическая структура ранга (2,2). Тогда эта модель является аддитивной соединительной структурой и для функций R', S' из (2) существуют в силу предыдущей теоремы функции φ, ψ и $\varepsilon > 0$, $x_1,x_2 \in Re$ такие, что $R'(a_{i\alpha 0}) = \varepsilon\varphi(i) + x_1$, $S'(a_{i0\alpha}) = \varepsilon\psi(\alpha) + x_2$.

Взаимосвязь принципа феноменологической симметрии и условия замыкания Томсена.

Функция φ для физической структуры ранга (2,2) разрешима относительно первого аргумента, поэтому существует функция f

$$\forall i,j,\alpha,\beta(a_{i\alpha} = f(a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta})). \qquad (6)$$

Кроме того, как видно из решения (2), функция f удовлетворяет условию

$$\forall i,j,\alpha,\beta(f(a_{i\beta},a_{j\alpha},a_{j\beta}) = f(a_{j\alpha},a_{i\beta},a_{j\beta})). \qquad (7)$$

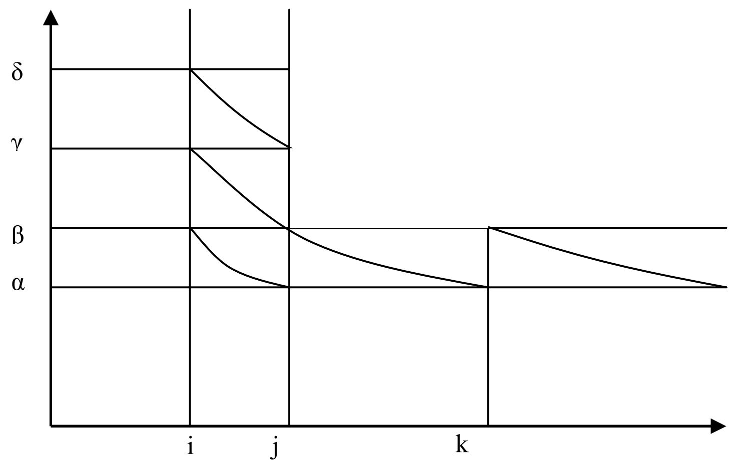

Рис. 2

Теорема. Если выполнены соотношения (6), (7) для некоторой функции f и соотношение (5), связывающее функцию f с моделью $\langle M{\times}N; \leq \rangle$, то на этой модели выполнено условие Томсена $(j,\alpha) \sim (i,\beta) \& (k,\beta) \sim (j,\gamma) \Rightarrow (k,\alpha) \sim (i,\gamma)$).

Доказательство: Делаем подстановку $\alpha \leftrightarrow \beta$, $i \leftrightarrow j$ тогда условие Томсена перепишется в виде $(i,\beta) \sim (j,\alpha) \& (k,\alpha) \sim (i,\gamma) \Rightarrow (k,\beta) \sim (j,\gamma)$ (Рис. 12). Тогда в силу (5) $a_{i\beta} = a_{j\alpha}$ и $a_{k\alpha} = a_{i\gamma}$. Подставив в (6) γ вместо α и $i \leftrightarrow j$, получим $a_{j\gamma} = f(a_{j\beta}, a_{i\gamma}, a_{i\beta})$. Из равенств $a_{i\beta} = a_{j\alpha}$ и $a_{k\alpha} = a_{i\gamma}$ следует, что $f(a_{j\beta}, a_{i\gamma}, a_{i\beta}) = f(a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{j\alpha})$. Из (7) следует $f(a_{j\beta}, a_{k\alpha}, a_{j\alpha}) = f(a_{k\alpha}, a_{j\beta}, a_{j\alpha})$. Подставим в (6) к вместо i и $\alpha \leftrightarrow \beta$ получим $f(a_{k\alpha}, a_{j\beta}, a_{j\alpha}) = a_{k\beta}$. Откуда $a_{j\gamma} = a_{k\beta}$ и $(j,\gamma) \sim (k, \beta)$ ■

Таким образом, принцип феноменологической симметрии, усиленный свойствами (6), (7) дает нам условие замыкания Томсена.

Этот принцип, а также условие Томсена являются основными характеристиками законов вида $y = x{\cdot}z$. Если мы возьмем произвольные два элемента $i,j \in M$ и элемент $\alpha \in N$ и подберем элемент $\beta \in N$ такой, что $a_{i\beta} \sim a_{j\alpha}$, то различие между элементами i и j при заданном α, определяемое значениями $a_{i\alpha}$, $a_{j\alpha}$, будет равно различию между α и β при заданном i, определяемому значениями $a_{i\alpha}$ $a_{i\beta}$. Так, благодаря измерительной процедуре $a: M{\times}N \to \|a_{i\alpha}\|$, мы можем соизмерять объекты двух разных множеств M и N. Поэтому сам факт существования эксперимента, позволяющего произвольным двум объектам $i \in M$ и $\alpha \in N$ сопоставлять

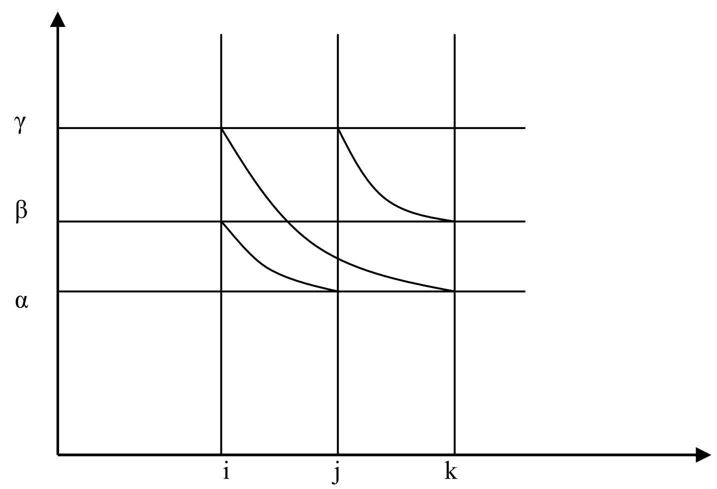

Рис. 1

некоторое число $a(i,\alpha) = a_{i\alpha}$, позволяет соизмерять объекты этих двух множеств. Процедуру соизмерения можно продолжать, что, в принципе, позволяет ввести некоторую величину на множестве M и некоторую величину на множестве N. Значение $a_{i\alpha}$ может тогда быть некоторой функцией этих двух величин и выражать некоторый закон.

Вид закона и свойства величин зависят от взаимосвязи одних процедур соизмерения с другими при различном выборе $i \in M$ и $\alpha \in N$. Эта взаимосвязь и определяется принципом феноменологической симметрии.