Лекция 11. События и вероятности событий

Сделаем следующий шаг обобщения: будем предполагать, что объекты для экспериментов выбираются некоторым случайным образом из основного множества **A** эмпирической системы как из генеральной совокупности объектов.

Это позволит нам ввести вероятность на множестве экспериментов, не меняя определения эксперимента как некоторого "фрагмента" эмпирической системы.

Определим вероятность μ на двоичном кубе E размерности N.

Определение 1. Вероятностью на E будем называть отображение μ: E $\rightarrow$ [0,1], удовлетворяющее условиям:

1. $\sum_{\varepsilon \in E} \mu(\varepsilon) = 1$

2. $\mu(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$.

Смысл условия 2 объясняется нижеследующей леммой 2.

Он состоит в том, что вероятность должна быть согласована с истинностью высказываний: если высказывание A тождественно истинно на $\mathfrak{I}$, то его вероятность должна быть равна 1, если же оно тождественно ложно, то его вероятность должна быть равна 0.

Определение 2. Событием в эксперименте Exp(s) будем называть любое подмножество E(A) $\subseteq$ E, $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$, $A \in \Re(\Omega)$. Вероятностью μ события E(A) будем называть величину

$\mu(E(A)) = \sum_{\varepsilon \in E(A)} \mu(\varepsilon)$

Будем говорить, что в результате эксперимента Exp(s) произошло событие E(A) или событие A, если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$. Событие A является элементом булевой алгебры $\Re(\Omega)$, которую мы так же будем называть **булевой алгеброй событий**.

Вероятность μ индуцирует вероятность η на булевой алгебре высказываний $\Re(\Omega)$.

Лемма 1. Функция $\eta(A) = \mu(E(A))$, $A \in \Re(\Omega)$, определяет на $\Re(\Omega)$ вероятность и для любых $A,B \in \Re(\Omega)$ удовлетворяет следующим аксиомам вероятности:

1. $\eta(A \vee B) + \eta(A \& B) = \eta(A) + \eta(B)$;
2. $\eta(\neg A) = 1 - \eta(A)$;
3. Если $\vdash A \equiv B$, то $\eta(A) = \eta(B)$;
4. Если $\vdash A$, то $\eta(A) = 1$,

где $\vdash$ доказуемость в исчислении высказываний.

Из условия 2 Определение 1 вероятности следует, что не только при доказуемости высказывания, но и при его истинности на эмпирической системе $\mathfrak{I}$, оно должно иметь вероятность 1.

Лемма 2. Для любого высказывания $A \in \Re(\Omega)$ выполнены следующие условия:

1. $\mathfrak{I} \vDash A \Leftrightarrow \eta(A) = 1$;
2. $\mathfrak{I} \vDash \neg A \Leftrightarrow \eta(A) = 0$.

Доказательство. Докажем, что условия 1 и 2 леммы эквивалентны. Подставим в условие 1 вместо высказывания A высказывание $\neg A$, получим: $\mathfrak{I} \vDash \neg A \Leftrightarrow \eta(\neg A) = 1 \Leftrightarrow (1 - \eta(A)) = 1 \Leftrightarrow \eta(A) = 0$. Докажем теперь условие 2. Пусть $\mathfrak{I} \vDash \neg A$, тогда A всюду ложно на $\mathfrak{I}$ и, значит, в силу последней леммы предыдущей лекции A ложно на Exp. Отсюда $\{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$ и $\mu(\varepsilon) = 0$, откуда следует, что $\eta(A) = 0$. Обратное доказательство получается обратным ходом рассуждения.

Определение вероятностного закона на Exp в детерминированном случае.

Введем определение вероятностного закона путем обобщения понятия закона на вероятностный случай. Сделаем это так, что бы понятие закона на Exp было частным случаем этого более общего определения.

Вспомним определение закона на Exp.

Законом на Exp является истинное на Exp правило, все подправила которого ложны на Exp.

Можно иначе переформулировать понятие закона на Exp. Законами являются такие правила, истинные на Exp, которые нельзя более упростить и/или логически усилить, сохраняя их истинность. Это свойство неупрощаемости позволяет сформулировать закон не только в терминах истинности но и вероятности и тем самым перекинуть мост между детерминированным и вероятностным случаями.

Теорема 1. Для правила $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1) следующие два условия эквивалентны:

1. правило C является законом на Exp;
2. a. $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ и условная вероятность $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена (т.е. $\eta(A_1\&...\&A_k) > 0$);
   b. условная вероятность $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Доказательство.

(1→2). Предположим, что правило C является законом на $\Im$.

а) Докажем, что тогда оно определено. Если правило C является законом на $\Im$, то подправило $(A_2\&...\& A_k \Rightarrow \neg A_1)$ не всегда истинно на $\Im$. Значит есть эксперименты, являющиеся исключениями из этого правила, т.е. эксперименты на которых высказывание $(A_2\&...\&A_k\&A_1)$ истинно. Тогда в силу $\eta(A_2\&...\&A_k \&A_1) > 0$. Отсюда получаем, что $\eta(A_1\&A_2\&...\&A_k) > 0$ и, значит, условная вероятность правила C определена. Отсюда следует, что условные вероятности всех подправил определены, т.к. из $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subseteq \{A_1,...,A_k\}$, следует, что $\eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}) \geq \eta(A_1\&...\&A_k) > 0$.

(2) Докажем теперь, что $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1 \Leftrightarrow$ правило C истинно на Exp.

Докажем, что из $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ следует истинность правила C на Exp. Предположим противное, что оно не истинно на Exp. Это означает, что существуют эксперименты, на которых высказывание $A_1\&...\&A_k\&\neg A_0$ истинно, и, значит, множество экспериментов $\{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) \in E(A_1\&...\&A_k\&\neg A_0)\} \neq \varnothing$ не пусто. Отсюда, вследствие свойства 2 теоремы 1, следует, что $\mu(A_1\&...\&A_k\&\neg A_0) \neq 0$. Но это противоречит условию $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$, т.к.

$\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = \eta(A_0\&A_1\&...\&A_k)/\eta(A_1\&...\&A_k) =$

$\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)/(\eta(A_0\&A_1\&...\&A_k)+\eta(\neg A_0\&A_1\&...\& A_k))$

и так как $\eta(\neg A_0\&A_1\&...\&A_k) > 0$, то $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) < 1$.

Обратное доказательство, что из истинности правила C на Exp следует, что $\eta(A_0/A_1 \&...\&A_k) = 1$, проводится теми же рассуждениями, проведенными в обратном порядке.

(3) Из пунктов (1), (2) следует, что условие 1 теоремы влечет условие 2a.

(4) Докажем, что из условия 1 теоремы следует условие 2b.

Если правило C является законом на Exp, то любое подправило $A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow L$ правила C ложно на $\Im$, где L - литера вида $\neg A$, для правил вида 1 теоремы 1, либо вида A, для правил вида 2. Ложность имеет место тогда и только тогда, когда $\{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) \in E(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L)\} \neq \varnothing$, что в силу свойства 2 теоремы, эквивалентно условию $\eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L) > 0$. Из последнего неравенства следует:

$\eta(L/A_{i1}\&...\&A_{ih}) = \eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&L)/\eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}) =$

$\eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&L)/(\eta(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L) + \eta(A_{i1}\&...\& A_{ih}\&L)) < 1.$

Но поскольку, в силу пункта (2), условная вероятность правила C равна 1, то ложность любого подправила на $\Im$ эквивалентна неравенствам $\eta(L/A_{i1}\&...\&A_{ih}) < 1 = \eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$.

(5) Таким образом, мы доказали, что из условия 1 теоремы следуют условия 2a и 2b, что доказывает теорему в одну сторону.

(6) Докажем, что из условий 2a и 2b следует условие 1 теоремы. Если для правила C условная вероятность определена, то в силу пункта (1) будут определены и условные вероятности всех его подправил. Так как условная вероятность правила C, в силу условия 2a равна 1, то в силу пункта (2) правило C будет истинным на Exp. Для доказательства того, что правило C будет законом необходимо доказать, что каждое подправило этого правила ложно. Это можно сделать проводя те же рассуждения, что и в пункте (4), только в обратном порядке ■

Данная теорема дает нам эквивалентное определение закона на Exp в терминах вероятностей.

Определение 3. **Вероятностным законом на Exp в детерминированном случае** будем называть правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условиям:

a) условная вероятность $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена ($\eta(A_1\&...\&A_k) > 0$) и $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$;
b) условная вероятность $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Следствие 1. Вероятностный закон на Exp в детерминированном случае является законом эмпирической системы $\Im$.

Доказательство. Следует из Теорема 1.

Определение вероятностного закона на Exp

Покажем, что в результате удаления условия $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ из Определение 3 вероятностного закона для детерминированного случая мы ничего не потеряем из существа определения закона и тем самым можем обобщить определение закона на вероятностный случай.

Вспомним, что именно свойство неупрощаемости позволило нам сформулировать определение вероятностного закона в детерминированном случае. Посмотрим на Теорема 1 с точки зрения **неупрощаемости** закона.

В вероятностных терминах свойство неупрощаемости закона звучит уже несколько иначе: для правила, истинного на M, для которого условная вероятность равна 1, неупрощаемость правила означает, что, если мы возьмем любое логически более сильное его подправило, то его условная вероятность строго уменьшится и станет строго меньше 1, т.е. вероятностный закон на Exp в детерминированном случае нельзя упростить, не уменьшив существенно его условную вероятность.

Поэтому два эквивалентных определения закона, сформулированные в Теорема 1 могут быть переформулированы в терминах неупрощаемости закона, только одно из них для значения истинности, а другое для условной вероятности. Из этой переформулировки видно, что для понятия закона важны не сама истинность, или то, что условная вероятность равна 1, а невозможность его упрощения с сохранением этих оценок (истинности, вероятности и т.д.). Это дает возможность дать более общее определение закона для правил вида (1), охватывающее как детерминированный так и вероятностный случаи.

Определение 4. Законом является такое правило C вида (1), характеризуемое некоторой оценкой, что его нельзя "упростить" (логически усилить в соответствии с теоремой 1) не уменьшив существенно этой оценки.

Эквивалентность двух различных определений закона с точки зрения данного определения закона для двух различных видов оценок - оценки истинности и оценки условной вероятности равной 1 доказана в Теорема 1.

Если мы удалим условия $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ из Определение 3 вероятностного закона для детерминированного случая мы ничего не потеряем из существа определения закона и тем самым обобщим определение закона на вероятностный случай включающий не только условную вероятность равную 1.

Определение 5. **Вероятностным законом на Exp** будем называть правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условию: условная вероятность $\eta(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена и строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Обозначим через LP множество всех вероятностных законов.

При переходе от Определение 3 вероятностного закона в детерминированном случае к Определение 5 вероятностного закона мы заменили оценку закона с условной вероятности равной 1 на просто оценку условной вероятности, оставаясь в рамках Определение 4 закона.

Определение 6. Сильнейшим вероятностным законом будем называть такой вероятностный закон C, который не является подправилом никакого другого вероятностного закона.

Обозначим через СВЗ множество всех сильнейших вероятностных законов.

Предложение 1. $L \subset$ СВЗ $\subset LP$.

Доказательство. Очевидно.

В силу Предложение 1 множество вероятностных законов шире множества законов, поэтому, обнаруживая вероятностные законы, мы будем обнаруживать как теорию $Th(\mathfrak{I})$ так и просто вероятностные законы.

Определение эксперимента с шумами

Определение эксперимента Exp(s), как некоторого "фрагмента", эмпирической системы не включает в себя случайностей, которые могут быть в эксперименте.

Определение 7. Эксперимент с шумами определим как набор

$Exp(s) = F\langle\langle a_1,...a_m\rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}}\rangle$, $m \le N$,

где $F: E \to E$ - случайное отображение. В случае, когда F – не тождественное отображение будем говорить, что мы имеем "стохастический" эксперимент.

Характеристики функции F как случайного отображения полностью определяются вероятностью μ. Определение вероятности η остается прежним.

Стохастический эксперимент Exp(s) получается в два этапа: сначала получается результат детерминированного эксперимента в соответствии с вероятностной мерой μ_D, а затем применяется случайное преобразование F, отражающее влияние на результаты детерминированного эксперимента шумов, ошибок, неточности приборов и т.д. в соответствии с вероятностной мерой μ_S. Приведем соответствующие определения.

Введение двух вероятностных мер позволит нам ввести вероятностную модель шумов.

Определим переход от значений детерминированного эксперимента, представленного некоторыми наборами в двоичном кубе E, к значению стохастического эксперимента как действие случайной функции $F: E \to E$. Отображение F есть некоторое случайное взаимнооднозначное отображение. Вероятностные характеристики этого отображения и соответственно модель шумов задаются соотношением двух вероятностей μ_D и μ_S. При этом вероятность μ_S - есть вероятность реальных экспериментов, а μ_D - вероятность гипотетического "идеального" эксперимента на эмпирической системе.

Устойчивость понятия вероятностной закономерности относительно некоторого типа шумов означает, что если некоторое множество правил $\{C_i\}$ является множеством вероятностных законов в детерминированном случае, то тоже самое множество правил будет множеством вероятностных законов и в стохастическом случае.

Эта формулировка ставит следующую проблему: определить какие вероятности и модели шумов сохраняют множество вероятностных законов.

Определение 8. Назовем модели шумов, определяемые парой вероятностей S_μ, D_μ, **сохраняющими** если множество вероятностных законов LP для вероятности S_μ и множество законов L для вероятности D_μ совпадают.

Для сохраняющих моделей шумов задача обнаружения теории $Th(\mathfrak{I})$ эмпирической системы $\mathfrak{I}$ решается обнаружением множества всех вероятностных закономерностей на $\mathfrak{I}$.

Поэтому данная работа ставит проблему: определить множество сохраняющих моделей шумов.

Сохраняющий двоичный шум

Предположим, что у нас есть эксперимент $Exp(s) = F\langle\langle a_1,...a_m\rangle, sI\Omega_{\mathfrak{I}}\rangle$ и вероятность в детерминированном случае μ_D. Определим шумы, задающие случайное преобразование $F: E \to E$. Предположим, что каждое атомарное высказывание, значение которого получается в эксперименте, подвергается воздействию независимой и одинаково распределенной двузначной случайной величины Λ, принимающей значение 1 с вероятностью $\lambda > 0.5$ и 0 с вероятностью $1-\lambda$. Если значения эксперимента представить как двоичный вектор $\langle 1,1,0,...,0,1\rangle$, где 1 - истина, а 0 - ложь, то преобразование $F: E \to E$ примет вид:

$\langle 1,1,0,...,0\ ,1\rangle \Rightarrow \langle \lambda_1 1, \lambda_2 1, \lambda_3 0,..., \lambda_{n-1} 0, \lambda_n 1\rangle$,

где $\lambda_1\ \lambda_2\ ,...,\lambda_n$ - различные независимые случайные величины с распределением Λ. Эксперимент с преобразованными значениями атомарных высказываний обозначим через $FExp(s)$. Пусть μ_S - вероятность для случайно преобразованного эксперимента.

Теорема 2. Множества законов для эксперимента $Exp(s)$ с вероятностью μ_D и вероятностных законов для эксперимента $FExp(s)$ с вероятностью μ_S совпадают.