Лекция 9. Обнаружение теории ПО.

Пусть исследуемая реальность – предметная область представлена эмпирической системой $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_\Im \rangle$ сигнатуры Ω,

$\mathbf{A}$ – множество объектов;

$\Omega_\Im = \{P^\Im_1, \ldots, P^\Im_n\}$.

Будем предполагать, что теория $Th(\Im)$ эмпирической системы $\Im$ (совокупность всех истинных на $\Im$ высказываний) представляет собой *совокупность универсальных формул*.

Будем предполагать, что существует N такое, что любая аксиома из $Th(\Im)$ имеет не более чем N кванторов всеобщности.

Определим фрагмент языка первого порядка L сигнатуры Ω, включающий:

$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ - множество свободных переменных;

At – множество всех атомарных формул (атомов) A, B, C, … вида $P(x_1, \ldots x_n)$, $x_1, \ldots x_n \in X$;

L – литеры – множество всех атомарных формул или их отрицаний;

$\Re(\Omega)$ - множество утверждений языка L, полученное замыканием множества At относительно логических операций &,v,¬.

В рамках исчисления высказываний на элементах булевой алгебры $\Re(\Omega)$ определено тождество утверждений $A \equiv B$. Будем предполагать, что логические константы $И \equiv A \vee \neg A$ и $Л \equiv A \& \neg A$ принадлежат $\Re(\Omega)$.

Известно, что совокупность универсальных формул логически эквивалентна совокупности правил вида

$$\forall x_1, \ldots, x_n (A_1 \,\&\, \ldots \&\, A_k \;\Rightarrow A_0) \qquad (1)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_k$ – литеры.

Поэтому будем предполагать, что теория $Th(\Im)$ – совокупность универсальных формул.

Задача: Обнаружить теорию $Th(\Im)$ эмпирической системы $\Im$ и, в частности, обнаружить системы аксиом эмпирической системы $\Im$.

Проанализируем эту задачу.

Что можно сказать об истинности высказываний из $Th(\Im)$ на эмпирической системе $\Im$, опираясь только на логический анализ высказываний.

Можно сказать, во-первых, что правило $C = (A_1 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$ может быть истинным на эмпирической системе только потому, что посылка правила всегда ложна. На самом деле, как мы покажем, это означает, что на эмпирической системе истинно некоторое логически более сильное "подправило", связывающее между собой атомы посылки.

Во-вторых, правило C может быть истинно на эмпирической системе только потому, что некоторое его логически более сильное "подправило", содержащее только часть посылки и то же заключение, истинно на эмпирической системе.

Поэтому система аксиом может быть истинной на эмпирической системе потому, что истинна некоторая система подправил, из истинности которой в свою очередь следует истинность системы аксиом.

Выясним из истинности каких логически более сильных "подправил" на эмпирической системе $\Im$ следует истинность самого правила. Тем самым мы получим определение "подправил" и определение закона для эмпирической системы $\Im$.

Теорема 1. Правило $C = (A_1 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$ логически следует (в исчислении высказываний) из любого правила вида:

1. $A_{i1} \& \ldots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}$,

где $\{A_{i1}, \ldots, A_{ih}, A_{i0}\} \subset \{A_1, \ldots, A_k\}$, $0 \le h < k$, т.е.

$(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$;

$\vdash$ - доказуемость в исчислении высказываний.

2. $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0)$,

где $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, $0 \le h < k$, т.е.,

$(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$.

Доказательство. 1. Докажем сначала первую цепочку выводов $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \equiv (\neg(A_{i1}\&...\&A_{ih})\vee\neg A_{i0}) \equiv (\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee\neg A_{i0}) \equiv \neg(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})$. Так как $\{A_{i1},...,A_{ih},A_{i0}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, то конъюнкция $A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0}$ является частью конъюнкции $A_1\&...\&A_k$. Из аксиомы алгебры высказываний $A\&B \vdash A$ по правилу modus ponense следует, что $A_1\&...\&A_k \vdash A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0}$. Поэтому из формул $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0})$, $A_1\&...\&A_k$ выводится противоречие $\neg(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})\&\ (A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})$. Отсюда следует, что $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1\&...\&A_k)$.

Докажем, что $\neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$. Так как $\neg(A_1\&...\&A_k) \equiv \neg A_1\vee...\vee\neg A_k$, то по правилу алгебры высказываний $A \vdash A\vee B$ выводим, что $\neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (\neg A_1\vee...\vee\neg A_k\vee A_0) \equiv (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$.

2. Докажем, что $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$, если $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, $0 \le h < k$. Так как $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \equiv (\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee A_0)$, то из схемы аксиом $A \vdash A\vee B$ алгебры высказываний и правила modus ponens следует, что $(\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee A_0) \vdash (\neg A_1\vee...\vee\neg A_k\vee A_0) \equiv (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ ♦

Из логики и методологии науки хорошо известно, что те высказывания следует считать **законами**, которые при одинаковой их подтверждённости на экспериментальных данных наиболее фальсифицируемы, просты и/или содержат наименьшее число "параметров".

В нашем случае все эти свойства, которые обычно трудно определить, следуют из определения логической силы высказывания.

"Подправила" одновременно является:

- логически более сильными высказываниями, чем само правило и более фальсифицируемыми, так как содержит более слабую посылку и, следовательно, применимы к большему объему данных и тем самым в большей степени подвержены фальсификации;
- более просты, так как содержит меньшее число атомарных высказываний, чем правило;
- включают меньшее число "параметров", так как лишние атомарные высказывания тоже можно считать параметрами "подстройки" высказывания под данные.

Почему же закон должен быть наиболее фальсифицируемым, прост и содержать наименьшее число параметров? Разные авторы придерживаются различных мнений на этот счет, либо не объясняют этого вообще.

В нашем случае для гипотез вида (1) мы можем точнее ответить на этот вопрос. Так как все описанные свойства закона вытекают из логической силы высказывания, то поиск логически наиболее сильных "подправил", истинных на эмпирической системе, позволяет нам не только проверить гипотезу об истинности системы аксиом, но и решить другую принципиально более важную задачу: *выяснить, а какова на самом деле та наиболее сильная (логически) теория, вытекающая из этих правил, которая описывает наши данные и возможно лежит в основании неизвестного нам закона их порождения?*

Решение этой задачи обнаружения закона в данных или, что то же самое, поиска сильнейшей теории в данных как раз и требует нахождения среди всех правил вида (1) логически наиболее сильных (среди истинных на эмпирической системе). Именно такие правила в соответствии с существующими представлениями следует считать законами эмпирической системы.

Следствие 1. Если некоторое подправило правила C истинно на эмпирической системе $\Im$, то и само правило C истинно на $\Im$.

Определение 1. Подправилом некоторого правила C будем называть любое из логически более сильных правил вида 1 или 2, определенных в теореме 1 для правила C.

Определение 2. **Законом эмпирической системы** $\Im$ будем называть любое, истинное на $\Im$ правило C вида (1), для которого каждое его подправило уже не истинно на $\Im$.

Обозначим через L множество всех законов эмпирической системы $\Im$.

Теорема 2. $L \vdash Th(\Im)$.

Доказательство: Найдем для каждого правила $C \in Th(\Im)$ минимальное подправило, для которого уже нет подправил истинных на $\Im$. Тогда эти подправила будут законами на $\Im$ и принадлежать L и, в силу, теоремы 1 из них будет выводиться теория ♦

Таким образом, обнаружение множества всех законов L решает задачу обнаружения теории эмпирической системы $Th(\Im)$.

Понятие эксперимента. Определение закона на множестве всех возможных экспериментов.

Эмпирическая система нам не известна, нам могут быть известны только результаты экспериментов. Поэтому необходимо определить понятие эксперимента на эмпирической системе $\Im$ и понятие закона на множестве всех экспериментов.

Свяжем проверку истинности системы аксиом на эмпирической системе $\Im$ с конкретными конечными экспериментами, на которых эта истинность проверяется. Тем самым мы не просто сделаем проверку аксиом конструктивной, а заменим задачу, которую можно выполнять только на теоретическом уровне, на задачу экспериментальной проверки.

Под интерпретацией языка L на эмпирической системе $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_\Im \rangle$ будем понимать два отображения:

$I(\Im)$ - интерпретацию сигнатурных символов: $I(\Im): \Omega \to \Omega_\Im$, сопоставляющую каждому сигнатурному символу P_j, местности nj предикат $P^{\Im}_j \in \Omega_\Im$

I - интерпретацию переменных $I: X \to X(A)$, сопоставляющую взаимно однозначно свободным переменным X переменные $X(A) = \{a,b,c,\ldots\}$ по основному множеству **A** эмпирической системы $\Im$.

Под состоянием $s: X(A) \to \mathbf{A}$ будем понимать отображение переменных из X(A) в некоторый набор объектов $\langle a_1,\ldots a_m \rangle$ из **A**.

Множество всех возможных состояний обозначим через St.

Эксперимент должен состоять в том, чтобы при заданных интерпретациях

$I(\Im)$, I предикатных символов и переменных, выбрать из основного множества **A** некоторый набор объектов $\langle a_1,\ldots a_m \rangle$ и подставить их вместо переменных $\{a,b,c,\ldots\}$. Далее определить значения истинности всех атомарных формул на $\langle a_1,\ldots a_m \rangle$.

Определение 3. Для заданных интерпретаций $I(\Im)$, I предикатных символов и переменных определим эксперимент как набор

$Exp(s) = \langle \langle a_1,\ldots a_m \rangle, sI\Omega_\Im \rangle,\ m \le N,$

где $s \in St$, $s(X(A)) = \langle a_1,\ldots a_m \rangle$; $sI\Omega_\Im$ - отображение переменных из предикатных символов из $\Omega_\Im$ в набор объектов $\langle a_1,\ldots a_m \rangle$. Суперпозиция $sI\Omega_\Im$ задает значения истинности предикатов из $\Omega_\Im$ на наборе объектов $\langle a_1,\ldots a_m \rangle$ ♦

Поскольку для данной эмпирической системы $\Im$ интерпретации $I(\Im)$, I предикатных символов и переменных фиксированы, то эксперимент обозначается как Exp(s).

Запись $\langle\langle a_1,...a_m\rangle, sI\Omega_{\Im} \rangle$ означает, что значения истинности атомарных высказываний на объектах набора $\langle a_1,...a_m\rangle$ определены и представлены в виде некоторого набора значений истинности всех атомарных высказываний на $\langle a_1,...a_m\rangle$.

Например, для $\Omega_{\Im} = \{\sim\}$ и объектов $\langle a,b,c\rangle$ эксперимент имеет вид:

$\langle\langle a,b,c\rangle, sI\Omega_{\Im}\rangle = \langle(a \sim a) = И, (b \sim b) = И, (c \sim c) = И, (a \sim b) = Л, (a \sim c) = И, (b \sim c) = И, (b \sim a) = Л, (c \sim a) = И, (c \sim b) = Л\rangle$.

Будем предполагать, что порядок атомарных высказываний в наборе $\langle\langle a,b,c\rangle, sI\Omega_{\Im}\rangle$ всегда фиксирован, поэтому, если взять набор значений истинности

$\varepsilon(Exp(s)) = \langle И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л\rangle$

или будем говорить бинарный вектор $\varepsilon(Exp(s))$ соответствующего эксперимента, то этот вектор будет однозначно характеризовать результаты эксперимента. В нашем примере этот вектор можно представить как вершину девятимерного двоичного куба $\{0,1\}^9$. Полученный вектор будем называть значением эксперимента Exp(s).

Пусть у нас есть некоторый эксперимент Exp(s), множество значений которого представляет собой двоичный куб E. Рассмотрим взаимосвязь куба E и булевой алгебры $\Re(\Omega)$. Как известно, любое утверждение из $\Re(\Omega)$ есть дизъюнкция элементарных конъюнкций атомов или их отрицаний из $U(\Omega)$.

Следовательно, во-первых, значение истинности любого утверждения $A \in \Re(\Omega)$ на эксперименте Exp(s) определено и вычисляется по правилам алгебры высказываний, во-вторых, любому утверждению $A \in \Re(\Omega)$ соответствует некоторое подмножество $E(A) \subseteq E$ векторов, на котором (и только на котором) оно истинно.

Так как $И \equiv A\vee\neg A$ и $Л \equiv A\&\neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Omega)$, то всему множеству E и пустому подмножеству $\varnothing$ вершин также соответствуют некоторые высказывания из $\Re(\Omega)$.

Поэтому, фактор алгебра $\Re(\Omega)/\equiv$ высказываний и множество всех подмножеств двоичного куба E изоморфны соответственно относительно логических операций на $\Re(\Omega)/\equiv$ и теоретико-множественных операций на E.

Каждому бинарному вектору $\varepsilon(Exp(s)) = \langle И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л\rangle \in E$, представляющему собой результаты некоторого эксперимента, будет соответствовать при таком изоморфизме элементарная конъюнкция

$(a \sim a)\&(b \sim b)\&(c \sim c)\&\neg(a \sim b)\&(a \sim c)\&(b \sim c)\&\neg(b \sim a)\&(c \sim a)\&\neg(c \sim b) \in \Re(\Omega)$, описывающая результаты соответствующего эксперимента, которую будем обозначать через A(Exp(s)).

Определим для эмпирической системы $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_{\Im}\rangle$ множество всех возможных экспериментов $Exp = \{Exp(s) \mid s \in St\}$.

Определение 4. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp(s) тогда и только тогда, когда при определенном в эксперименте Exp(s) наборе значений истинности $\varepsilon(Exp(s))$ формула C истинна или иначе формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp(s), если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(C)$.

Определение 5. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на Exp тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте $Exp(s) \in Exp$.

Определение 6. Законом на Exp будем называть любое истинное на Exp правило C вида (1), каждое подправило которого уже не истинно на Exp.

Теорема 3. Правило C вида (1) является законом эмпирической системы $\Im$ тогда и только тогда, когда оно является законом на Exp.

Лемма 1. Формула $C \in \Re(\Omega)$ истинна на эмпирической системе $\Im = \langle \mathbf{A}; \Omega_{\Im}\rangle$ тогда и только тогда, когда она истинна на Exp.

Доказательство.

1. Пусть формула C истинна на $\Im$. Докажем, что она истинна на любом эксперименте из Exp.

Пусть дан эксперимент Exp(s) с интерпретациями $I(\mathfrak{I})$, I предикатных символов и переменных. Так как проверка истинности осуществляется для той же интерпретации $I(\mathfrak{I})$ путем подстановки объектов из **A** вместо переменных, то суперпозиция $sI\Omega_{\mathfrak{I}}$ также является подстановкой объектов из набора $\langle a_1,...a_m\rangle$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_{m'}$, $m' \le m$ формулы C и поэтому формула C истина на эксперименте Exp(s) вне зависимости от того какие значения принимают другие предикаты на других объектах из набора $\langle a_1,...a_m\rangle$.

2. Пусть формула C истинна на любом эксперименте из Exp. Докажем, что она истинна на эмпирической системе $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{A}; \Omega_{\mathfrak{I}}\rangle$. Возьмем произвольные объекты $a_1,...a_{m'} \in$ **A** и подставим их в формулу C вместо переменных $x_1, \ldots, x_{m'}$. Докажем, что формула C будет истинной. Поставим эксперимент над набором объектов $\langle a_1,...a_{m'}\rangle$, в котором суперпозиция sI отображает переменные $x_1, \ldots, x_{m'}$ сначала в переменные их X(A) = {a,b,c,…}, а потом состоянием s в набор объектов $\langle a_1,...a_m\rangle$ из **A** так что бы в результате вместо переменны $x_1, \ldots, x_{m'}$ подставились объекты набора именно в том порядке, как мы подставили для проверки истинности. Формула C будет истинна на полученном эксперименте Exp(s) и, значит, будет истинна на подставленных объектах.

Поэтому мы не будем вводить отдельного определения для множества всех законов на Exp, а будем его обозначать также через L.

Таким образом, задача обнаружения теории эмпирической системы $Th(\mathfrak{I})$ переходит в задачу: определения множества L всех законов на Exp.